Twierdzenie Bézouta

(2.9)

Tw. o reszcie

Liczba r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$, to $r=w(a)$

Przykład.

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)=2x^3+3x^2-x+5$ przez dwumian $x+2$ nie ~~niewykonując~~ wykonując dzielenia.

Czyli zakładam, że $x=-2$

Zatem $w(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-(-2)+5=$

$=2\cdot(-8)+3\cdot(4)+2+5=-16+12+7=3$

Czyli $r=3$

Tw. Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$

Pierwiastek wielomianu to miejsce zerowe $w(a)=0$, $\Leftrightarrow$

a jest pierwiastkiem wielomianu to wielomian jest podzielny przez dwumian $a-x$

oraz

wielomian w jest podzielny przez $x-a$ to a jest pierwiastkiem wielomianu zad 1 Przykład

a) w którym z wielomianów

$w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$

czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$

jest podzielny przez dwumian $x-2$

$w(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 10 = 0$ zatem 2 jest pierwiastkiem wielomianu w

$u(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 6 = -14 \neq 0$ czyli 2 nie jest pierwiastkiem wielomianu u

zad 1 tw. o reszcie

a) $w(x) = x^8 - 3x^3 + 2$ $\quad q(x) = x - 1$

$w(1) = 1^8 - 3 + 2 = 0$ $\quad r = 0$

b) $w(x) = 2x^7 + x^6 - 5x^3 - 2x + 4$ $\quad q(x) = x + 1$

$w(-1) = 2\cdot(-1)^7 + (-1)^6 - 5\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1) + 4 =$

$= -2 + 1 + 5 + 2 + 4 = 10$ $\quad r = 10$

c) $w(x) = -9x^3 + 6x^2 + 12x - 1$ $\quad q(x) = x - \frac{1}{2}$

$w(\frac{1}{2}) = -9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 1 =$

$= -\frac{9}{8} + \frac{6}{4} + 6 - 1 = -\frac{9}{8} + \frac{12}{8} + 5 = 5\frac{3}{8}$

$r = 5\frac{3}{8}$

19

zad 2 tw. Bezouta

a) $w(x) = 3x^3 + 2x^2 - 23x - 5$ $q(x) = x+3$

$w(-3) = 3(-3)^3 + 2\cdot(-3)^2 - 23\cdot(-3) - 5 =$

$= 3(-27) + 18 + 69 - 5 = 1$ $r = 1$

czyli nie jest podzielna przez $q(x)$

b) $w(x) = 2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 7x - 2$ $q(x) = x-2$

$w(2) = 2\cdot 2^4 + 5\cdot 2^3 - 21\cdot 4 + 7\cdot 2 - 2 =$

$= 32 + 40 - 84 + 14 - 2 = 0$ TAK

zad 3

a) $a = 2$ $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$w(2) = 8 + 2\cdot 4 - 10 - 6 = 0$ a jest pierwiastkiem

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 : (x-2) = x^2 + 4x + 3$

$x^2 + 2x^2$

$=$

$4x^2 - 5x$

$-4x^2 + 8x$

$= 3x - 6$

$-3x + 6$

$= \quad =$

$(x^2 + 4x + 3)(x - 2) = (x+1)(x+3)(x-2)$

$x = -1$ $x = -3$ $x = 2$

20

b) $a=-4$ $\quad w(x)=x^3+6x^2+10x+8$

$w(-4)=(-4)^3+6(-4)^2+10(-4)+8=$
$=-64+96-40+8=0$

$x^3+6x^2+10x+8:(x+4)=x^2+2x+2$
$-x^3-4x^2$
$= \quad 2x^2+10x$
$-2x^2-8x$
$= \quad 2x+8$
$-2x-8$
$= \quad =$

$(x^2+2x+2)(x+4)=0$

$\Delta=4-8$ $\quad x=-4$
$\sqrt{\Delta}=-4$
$\Delta<0$
brak

Nie ma innych pierwiastków niż -4.

zad 4

$w(x)=x^3+(2m-1)x^2-3x+12$ wielomian jest podzielny przez dwumian $x+2$, gdy:

$w(-2)=0$

$w(-2)=-8+(2m-1)(-2)^2-3(-2)+12=$
$=-8+4(2m-1)+6+12=4(2m-1)+10$

21

$4(2m-1)+10=0$
$8m-4+10=0$
$8m+6=0$

$8m+6=0$
$8m=-6$

$m=-\frac{3}{4}$

Zad 5

a) Sprawdzamy czy 1 i -2 są pierwiastkami wielomianu

$w(1) = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1 - 7 + 3 = 0$

$w(-2) = 2\cdot(-2)^5 + 3\cdot(-2)^4 + 3\cdot(-2)^3 + 2 - 7 = -45$

Zatem wielomian $w(x) = 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 - x - 7$ nie jest podzielny przez $q(x) = (x-2)(x+2)$ ponieważ nie jest podzielny przez $(x+2)$

b) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 12x + 40$ $\quad q(x) = (x-2)(x+5)$

Sprawdzamy czy 2 i -5 są pierwiastkami wielomianu.

$w(2) = 2^4 + 3\cdot 2^3 - 14\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 40$

$w(2) = 0$

$w(-5) = (-5)^4 + 3\cdot(-5)^3 - 14(-5)^2 - 12\cdot(-5) + 40$

$w(-5) = 0$

Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 12x + 40$ jest podzielny przez $q(x) = (x-2)(x+5)$, ~~bo jest~~

22

zad 6

Jeżeli wielomian $w(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ jest podzielny przez $(x-1)(x-3)$ to 1 i 3 są pierwiastkami tego wielomianu.

Zatem:

$w(1) = 1 - 5 + a + b$

$w(3) = 27 - 45 + 3a + b$

$\begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4 - b \\ 3(4-b) + b = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4 - b \\ 12 - 3b + b = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} b = -3 \\ a = 7 \end{cases}$

zad 7

Jeżeli wielomian $w(x)$ jest podzielny przez $x+1$ ~~jest~~ to -1 jest pierwiastkiem wielomianu.

$W(-1) = 2\cdot(-1)^3 - b\cdot 1 - 1 = 0$

$-2 - b - 1 = 0$

$-b = +3$

$b = -3$

23

Odp. A. $b=-3$