2.7

Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x)=0$ nazywamy równaniem wielomianowym.

Wcześniejszy rozkład na czynniki jest wykorzystywany do wyznaczania jego pierwiastków (miejsca zerowe argumenty)

np. $w(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu rozwiązujemy równanie

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$

$a \cdot b = 0 \iff$ gdy $a=0$ lub $b=0$

$$x^2\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$$

$x=0 \quad x=4$ – to są pierwiastki

zad 1

a) $w(x) = (x-2)(2-3x)(x+1)$

$x=2 \quad x=\frac{2}{3} \quad x=-1$

b) $w(x) = (9-x^2)(x-3)(2x+6)$

$x=3 \quad x=-3 \quad \underline{x=3} \quad \underline{x=-3}$

zad 2

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

$3x^2(x^2-4) = 0$

$x=0 \quad x=-2 \quad x=2$

b) $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$

$x(x^2 - 8x + 15) = 0$

$\underline{x=0}$ ✓ $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Delta = 64 - 60 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \frac{8-2}{2} = \underline{3}$

$x_2 = \frac{8+2}{2} = \underline{5}$

8

zad 3

a) $\underbrace{x^3+3x^2}\underbrace{-4x-12}=0$ grupowanie

$x^2(x+3)-4(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-4)=0$

$x=-3 \quad x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$x_1=2 \quad x=-2$

b) $\underbrace{12x^3-5x^2}+\underbrace{12x-5}=0$

$x^2(12x-5)+(12x-5)=0$

$(x^2+1)(12x-5)$

brak rozwiązania

$12x=5 \quad /:12$

$x=\frac{5}{12}$

c) $\underbrace{x^5+2x^4}\underbrace{-3x^3-6x^2}\underbrace{+2x+4}=0$

$x^4(x+2)-3x^2(x+2)+2(x+2)=0$

$(x^4-3x^2+2)(x+2)=0$

$t=x^2 \quad x=-2$

$t^2-3t+2=0$

$\Delta=9-4\cdot2 \qquad t_1=\frac{3-1}{2}=1 \qquad x=1 \quad x=-1$

$\Delta=1 \quad \sqrt{\Delta}=1 \qquad t_2=\frac{3+1}{2}=2 \qquad x=\sqrt{2} \quad x=-\sqrt{2}$

9

d)* $x^3 - 5x + 4 = 0$

$$\cancel{x^3 + x^2 - x^2 - x - 4x + 4 = 0}$$

$$\cancel{x^2(x+1) - x(x+1)}$$

$$x^3 - x^2 + x^2 - x - 4x + 4 = 0$$

$$x^2(x-1) + x(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x^2 + x - 4)(x-1) = 0$$

$\Delta = 1 + 16$ $\quad x = 1$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

zad 4

$$w(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5$$

$$u(x) = x^3 - x^2 + 4x + 5$$

Szukamy argumentów, dla których wielomiany przyjmują tę samą wartość, zatem

$$2x^3 - 3x^2 - x + 5 = x^3 - x^2 + 4x + 5$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 5) = 0$$

$x = 0$

$\Delta = 4 + 20$

$\Delta = 24 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{6}}{2} = 1-\sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{6}}{2} = 1+\sqrt{6}$$

Zatem, dla tych trzech punktów wartości wielomianu przyjmuje taką samą wartość, czyli mamy 3 punkty wspólne.

11

zad 5

$$(x^3+125)(x^2-64)=0$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(x+5)(x^2-5x+25)(x-8)(x+8)=0$$

$x=-5$ $\quad \Delta=25-100$ $\quad x=8 \quad x=-8$

$\Delta=-75$

Szybciej

$$x^3+125=0$$

$$x^3=-125$$

$$x=\sqrt[3]{-125}$$

$$x=-5$$

zad 6

$$(x^3-8)(x^2-4x-5)=0$$

$x=2$ $\quad \Delta=16+20$

$\Delta=36 \quad \sqrt{\Delta}=6$

$x_1=\frac{4-6}{2}=-1 \quad x_2=\frac{4+6}{2}=5$

zad 7

$w(x)=4x^3+14x^2 \qquad y=2x^2+x+3$

Zatem szukamy punktów wspólnych

$$4x^3+14x^2=2x^2+x+3$$

$4x^3+12x^2-x-3=0$ $\quad$ grupowanie

$$4x^2(x+3)-1(x+3)=0$$

$$(4x^2-1)(x+3)=0$$

$x=\frac{1}{2} \quad x=-\frac{1}{2} \quad x=-3$

$(-3, 18)$
$(1/2, 4)$
$(-1/2, 3)$

12

zad 8

A. $x^3-1=0$ $x=1$

B $x^4-x=0$ $x(x^3-1)=0$

C $x^5-x^3=0$ $x^3(x^2-1)=0$ $x=0$ $x=1$ $x=-1$

D. Nie

zad 9

$x^4-5x^2+4=0$

$t=x^2$

$t^2-5t+4=0$

$\Delta=25-16$

$\Delta=9$ $\sqrt{\Delta}=3$

Jeżeli $\Delta>0$ to ma 4 rozwiązania

13