

Wielomiany

Rozkład wielomianu na czynniki

Tw.

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

np.

1. Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki

$$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2)$$

wyciągnij $4x^4$ przed nawias.

2. $w(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9)$
 $= x^4(x - 3)^2$

wyciągnij x^4 przed nawias.
zauważamy wzór skróconego mnożenia

3. $w(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$
 $= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

1° wyciągnij x przed nawias

2° korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

3° $x^2 + 4$ nie można rozłożyć

4. $w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1)$

$$\Delta = 1 - 24 \quad \Delta = -23$$

nie można rozłożyć $(6x^2 - x + 1)$ bo $\Delta < 0$

1

!! Rozłożenie wielomianu na czynniki polega na zapisaniu wzoru za pomocą iloczynu nawiasów (tzw. postać iloczynowa wielomianu)

zad 1

$$a) u(x) = x^7 - x^5 = x^5(x^2 - 1) = x^5(x-1)(x+1)$$

$$b) u(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 = x^3(x^2 - 4x + 4) = x^3(x-2)^2$$

$$\Delta = 16 - 16$$

$$\Delta = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$c) u(x) = 8x^3 - x = x(8x^2 - 1) = x(\sqrt{8}x - 1)(\sqrt{8}x + 1)$$

$$d) u(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = x^2(2x^2 - 5x + 3) = x^2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

$$\Delta = 25 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = 49 \quad \Delta_1 = 7$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

postać iloczynowa

funkcji kwadratowej

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

zad 2

$$a) u(x) = (2x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 2) = 2(x - \frac{1}{2})(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1 \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$b) u(x) = (3x^2 - 7x - 20)(-x^2 + 3x - 5) = 3(x + \frac{5}{3})(x-4)(-x^2 + 3x - 5)$$

$$\Delta = 49 + 8 \cdot 20$$

$$\Delta = 279$$

$$\sqrt{\Delta} = 17$$

$$x_1 = \frac{7-17}{3 \cdot 2} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{7+17}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$\Delta = 9 - 20 = -11$ - ujemne nie można
kolegozji na czynnik

2

zad 3

$$w(x) = (2x^2 + 5)(3x^2 - 5x + 4)$$

↑
wielomian
stopnia drugiego,
który nie możemy
rozłożyć

↑
wykorzystujemy
twierdzenie Krzywickiego
lub Δ

to to czynnik liniowy
↓ wielomian stopnia
pierwszego

$$3x^2 - 5x + 4$$

$$\Delta = (25) - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 25 - 48 = -23$$

$$\Delta < 0$$

nie ma możliwości rozłożenia na czynniki liniowe

$$u(x) = x^3 - 3x^2 + 8x = x(x^2 - 3x + 8)$$

↑
czynnik liniowy

$$x^2 - 3x + 8 = 0$$

$$\Delta = 9 - 32 = -21 \quad \Delta < 0$$

$$p(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

nie ma możliwości rozłożenia
na czynniki

Zatem odp. $u(x)$ i $p(x)$ nie można rozłożyć na
czynniki liniowe

zad 4.2

$$(n^3 + n^2 - 2n)(n^2 + 4n + 3) : 60$$

$$n(n^2 + n - 2)(n^2 + 4n + 3) =$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9 \quad x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

$$= n(n+2)(n-1)(n+1)(n+3) = (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$60 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5$$

załączamy, że dla dowolnej liczby naturalnej jest to iloczyn 5 kolejnych liczb naturalnych, zatem co najmniej jeden jest podzielny przez 3, 4, 5, czyli jest podzielny przez 60

np $n=2$

$$(2-1)(2)(2+1)(2+2)(2+3)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad \text{zatem jest podzielny przez 60}$$

zad 5

$$u(x) = 8x^3 - 27$$

Korzystamy ze wzoru

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$8x^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$

odp D

Rozkład wielomianu na czynniki

Podsumowanie:

Wielomiany zawsze staramy się rozkładać na czynniki liniowe lub nierozkładalne czynniki 2 stopnia.

Wielomian można rozkładać za pomocą poniższych metod

- wyłuskanie wspólnego czynnika przed nawias
- grupowanie wyrazów
- zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

metoda grupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} \text{np. } u(x) &= 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6 = (7x^3 - 21x) + (2x^2 - 6) = \\ &= 7x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = \\ &= (7x + 2)(x^2 - 3) = (7x + 2)(x - 3)(x + 3) \end{aligned}$$

Zad 1

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a) u(x) = 8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$b) u(x) = 27x^5 + 125x^2 = x^2(27x^3 + 125) = x^2(3x + 5)(9x^2 - 15x + 25)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} c) u(x) &= x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(\underbrace{(x^2 + 1)^2}_{a^2 + b^2} - x^2) = (x - 1)(x + 1)(\underbrace{(x^2 + 1 - x)}_{a^2 + ab + b^2}) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia

$$d) \quad w(x) = (x^2 + 2)^2 - 9 = (x^2 + 2 - 3)(x^2 + 2 + 3) = \\ = (x^2 - 1)(x^2 + 5) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 5)$$

zad 2

$$a) \quad w(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = \\ = x^3 + x - 2x^2 - 2 = x(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) = \\ = (x^2 + 1)(x - 2)$$

$$b) \quad w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 8x^3 + 4x + 4x^2 + 2 = 4x(x^2 + 1) + 2(2x^2 + 1) = \\ = (4x + 2)(2x^2 + 1)$$

$$c) \quad w(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^3 - 3x - x^2 + 3 = x(x^2 - 3) - 1(x^2 - 3) = \\ = (x - 1)(x^2 - 3) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

$$d) \quad w(x) = \sqrt{2}x^3 - 4x^2 + 3\sqrt{2}x - 12 = x^2(\sqrt{2}x - 4) + 3(\sqrt{2}x - 4) = \\ = (x^2 + 3)(\sqrt{2}x - 4)$$

zad 3

$$w(x) = x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 - 4x^2 = (x^2 + 4 - 2x)(x^2 + 4 + 2x)$$

używając skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

zad 4

$$w(x) = 4x^5 - 12x^3 + x^2 - 3 = 4x^5 + x^2 - 12x^3 - 3 = x^2(4x^3 + 1) - 3(4x^3 + 1) = \\ = (x^2 - 3)(4x^3 + 1) = (x^2 - 3)(\sqrt[3]{4x^3 + 1})(\sqrt[3]{16x^3 - 12x^2 + 4x + 1})$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

zad 5

$x \in \mathbb{R}$

$$w(x) = 2x^4 - 12x^2 + 18 = 2(x^4 - 6x^2 + 9) = \underline{2(x^2 - 3)^2}$$
$$= 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Łatwo sprawdzić, że kwadrat dowolnej liczby nawet ujemnej jest zawsze wartości nieujemny.

np gdy $x = -1$ $2((-1)^2 - 3)^2 = 2(1 - 3)^2 = 2(-2)^2 = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}$

zad 6

$$w(x) = (x^2 - 4)(x^2 + x - 2) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x - 2) =$$
$$= (x - 2)^2(x + 2)^2(x(x + 2) - 1(x + 2)) =$$
$$= (x - 2)^2(x + 2)^2(x - 1)(x + 2)$$

Odp. D bo nie ma $(x + 1)$