Pierwiastki całkowite wielomianu

2.10

Tw. o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Np. Korzystając z tego twierdzenia szukamy pierwiastków.

zad 1

a) $w(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ $\{-1, 1, 2, -2, -3, 3, 6, -6\}$

$w(x) = x^2(x-3) + 2(x-3) = (x^2+2)(x-3)$

$x = 3$

b) $w(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ $\{-1, 1, 2, -2\}$

$w(x) = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - x + 2 =$

$= x^2(x-2) + x(x-2) - (x-2) = 0$

$= (x^2 + x - 1)(x-2)$

$x = 2 \rightarrow$ całkowity

zad 2.

a) $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$ $\{-1, 1, 2, -2, 5, -5\}$

$w(2) = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$

24

$x^3 + 2x^2 - 3x - 10 : (x-2) = x^2 + 4x + 5$

$-x^3 + 2x^2$

$= \quad 4x^2 - 3x$

$- 4x^2 + 8x$

$= \quad 5x - 10$

$x^3+2x^2-3x-10=(x-2)(x^2+4x+5)$

$x=2 \qquad x^2+4x+5=0$

$\Delta=16-20$

$\Delta=-4$ nie ma rozwiązania

b) $x^3-4x^2+x+6=0 \qquad \{-1,1,2,-2,3,-3,-6,6\}$

$W(2)=8-\cancel{8}\,16+2+6=\cancel{8}\,0$

$W(-2)=-8-4+2+6=-4$

! $W(-1)=-1-4-1+6=\underline{0}$ ✓

$x^3-4x^2+x+6:(x+1)=x^2-5x+6$

$-x^3-x^2$

$= \quad -5x^2+x$

$+5x^2+5x$

$= \quad -6x+6$

$6x+6$

$= \quad =$

$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$

$x=-1 \qquad x^2-5x+6=0$

$\Delta=25-24$

$\Delta=1 \quad \sqrt{\Delta}=1$

$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \qquad x_2=\frac{5+1}{2}=3$

$\{-1,2,3\}$

25

b) $x^3 - 19x + 30 = 0$ $\quad W: \{1, -1, -2, 2, 3, 10, 5, 6, 15, -15\}$

$W(2) = 8 - 38 + 30 = 0$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 19x + 30) : (x - 2) = x^2 + 2x - 15 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
= \quad 2x^2 - 19x \\
\quad \underline{-2x^2 + 4x} \\
\quad = \quad -15x + 30 \\
\qquad \underline{+15x - 30} \\
\qquad = \quad =
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2 + 2x - 15) = 0$

$x = 2$ $\qquad x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 + 60$

$\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5$

$\{2, 3, -5\}$

26

zad 4.2 $\quad W(x) = x^3 + x^2 + x + 6$

Zauważamy, że dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 ~~są~~ $= 6$ są liczby $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.

Stwierdzamy, że -2 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(-2) = -8 + 4 - 2 + 6 = 0$$

Zatem wielomian jest podzielny przez dwumian i korzystając z tw. Bezouta mamy

$$(x^3 + x^2 + x + 6)(x+2) = x^2 - x + 3$$

$$\begin{array}{l} -x^3 - 2x^2 \\ \hline = -x^2 + x \\ \quad +x^2 + 2x \\ \hline \quad = 3x + 6 \\ \quad\ -3x - 6 \\ \hline \quad\ = \quad = \end{array}$$

$$(x+2)(x^2 - x + 3) = 0$$

$x = -2 \qquad \Delta = 1 - 12$

$\Delta = -11$ zatem wielomian q nie ma pierwiastków ~~oprócz~~

Czyli ~~x=2~~ $x = -2$ jest to jedyny pierwiastek wielomianu

27

zad 5

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu wielomianu z osiami układu współrzędnych.

Dla $x=0$ mamy:

$w(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

$W(0) = 15$ $A=(0,15)$

~~$A=(15,0)$~~

Dla $y=0$ mamy

$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$

$\underbrace{x^3 + x^2} - \underbrace{8x^2 - 8x} + \underbrace{15x + 15} = 0$

$x^2(x+1) - 8x(x+1) + 15(x+1) = 0$

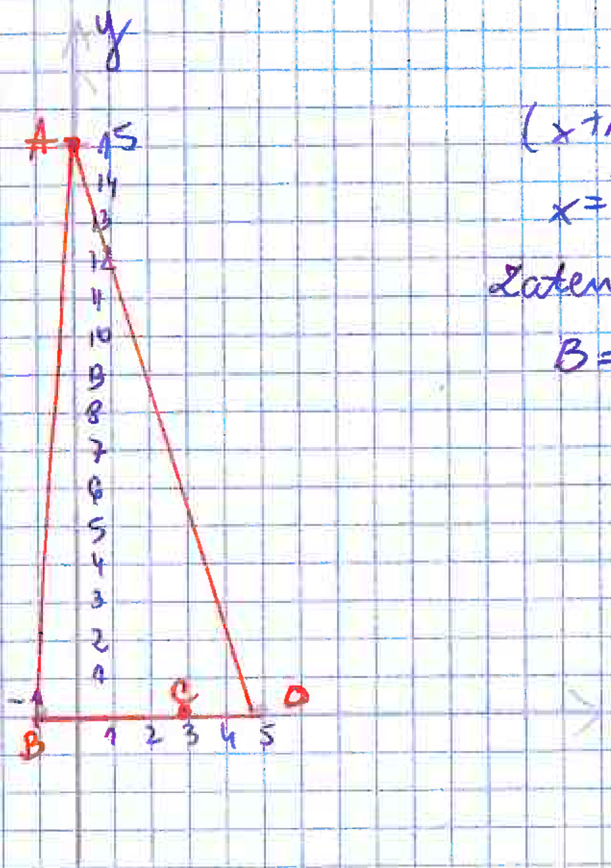
$(x+1)(x^2 - 8x + 15) = 0$

$(x+1)(x-3)(x-5) = 0$

$x=-1$ $x=3$ $x=5$

Zatem punkty

$B=(-1,0)$ $C=(3,0)$ $D=(5,0)$



Możemy zauważyć, że pole trójkąta jest największe, gdy jest wyznaczone przez punkty A B D

Wyznaczamy pole tego trójkąta: $P = \frac{1}{2} a \cdot h$

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 = \underline{45}$

28